En estos sistemas el campo es conservativo si la expresión de la última columna es una diferencial exacta: $\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_i} = h_i F_i$.

Parametrizaciones que se usan.

Curva	$\vec{r}(t)$	Intervalo
Segmento de A a B	$A + t\,(B - A)$	$0 \le t \le 1$
Circunferencia de radio R y centro (x_0, y_0), sentido antihorario	$(x_0 + R\cos t,\ y_0 + R\,\mathrm{sen}\,t)$	$0 \le t \le 2\pi$
Elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$(a\cos t,\ b\,\mathrm{sen}\,t)$	según el tramo
Hélice	$(R\cos t,\ R\,\mathrm{sen}\,t,\ ct)$	el que se indique
Gráfica $y = g(x)$	$(t,\ g(t))$	de x_A a x_B
Gráfica $x = g(y)$	$(g(t),\ t)$	de y_A a y_B

Trabajo contra la gravedad. Para subir un cuerpo de peso w hay que aplicar $\vec{F} = w\,\hat{k}$, que es conservativo con $\varphi = wz$. Por eso $W = w\,\Delta z$, sin importar la forma del camino.

3.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
$\int_C f\,ds$, «campo escalar», «masa de un alambre»	integral de línea de un campo escalar	3.3.1
«trabajo», $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\int_C P\,dx + Q\,dy$, «circulación»	integral de un campo vectorial: primero el rotacional	3.3.3
«independiente de la trayectoria», «función potencial», «diferencial exacta»	campo conservativo	3.3.3 y 3.3.4
«determine a, b, c para que sea conservativo (o irrotacional) y solenoidal»	constantes de un campo	3.3.5
campo con $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z$ o $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$	trabajo en coordenadas curvilíneas	3.3.6
«trayectoria cerrada», «una vuelta», $\oint_C$	curva cerrada	3.3.7
«peso», «sube», «contra la gravedad»	trabajo contra la gravedad	$W = w\,\Delta z$
campo no conservativo sobre segmentos, elipses o gráficas	parametrización directa	3.3.2

Resultado: $\vec{a}_T = \vec{0}$, $\vec{a}_N = 2\,\hat{\jmath}$ y $\kappa = 2$. En $t = 1$ la partícula no acelera ni frena: solo gira, como en una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 2A.5.2 · Funciones hiperbólicas

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 2.

La posición de una partícula está dada por $\vec{r}(t) = \cosh t\,\hat{\imath} + \mathrm{senh}\,t\,\hat{\jmath} + \hat{k}$, donde t es el tiempo. Obtenga en el instante $t = 0$:

- a) unas ecuaciones cartesianas de la curva;
- b) los vectores aceleración normal y aceleración tangencial;
- c) la curvatura y la torsión.

Resolución.

1. a) Como $\cosh^2 t - \mathrm{senh}^2 t = 1$: $x^2 - y^2 = 1$, $z = 1$, en la rama $x > 0$ porque $\cosh t \ge 1$.
2. $\vec{r}\,' = (\mathrm{senh}\,t,\ \cosh t,\ 0) \Rightarrow (0,1,0)$; $\vec{r}\,'' = (\cosh t,\ \mathrm{senh}\,t,\ 0) \Rightarrow (1,0,0)$; $\vec{r}\,''' \Rightarrow (0,1,0)$.
3. b) $|\vec{v}| = 1$ y $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$, así que $\vec{a}_T = \vec{0}$ y $\vec{a}_N = \vec{a} = \hat{\imath}$.
4. $\vec{v}\times\vec{a} = (0,1,0)\times(1,0,0) = (0,0,-1)$, con norma 1.
5. c) $\kappa = \dfrac{1}{1^3} = 1$ y $\tau = \dfrac{(0,0,-1)\cdot(0,1,0)}{1^2} = 0$.

Resultado: $x^2 - y^2 = 1$, $z = 1$ $(x > 0)$; $\vec{a}_N = \hat{\imath}$, $\vec{a}_T = \vec{0}$; $\kappa = 1$ y $\tau = 0$. La torsión nula confirma que la curva es plana: está en el plano $z = 1$.

Ejercicio 2A.5.3 · Triedro, curvatura, torsión y plano osculador

Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, tipo A, problema 3.

Sea la curva $C:\ \vec{r}(t) = 2\,\mathrm{sen}\,t\,\hat{\imath} + 3\cos t\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}$. Determine, para el punto $P(0,-3,6)$:

- a) los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$;
- b) la curvatura y la torsión;
- c) la ecuación cartesiana del plano osculador.

Resolución.

1. $3\cos t = -3 \Rightarrow t_0 = \pi$. Comprobación: $2\,\mathrm{sen}\,\pi = 0$.
2. $\vec{r}\,' = (2\cos t,\ -3\,\mathrm{sen}\,t,\ 0) \Rightarrow (-2,0,0)$; $\vec{r}\,'' = (-2\,\mathrm{sen}\,t,\ -3\cos t,\ 0) \Rightarrow (0,3,0)$; $\vec{r}\,''' = (-2\cos t,\ 3\,\mathrm{sen}\,t,\ 0) \Rightarrow (2,0,0)$.
3. $\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'' = (-2,0,0)\times(0,3,0) = (0,0,-6)$, con norma 6; $|\vec{r}\,'| = 2$.
4. a) $\hat{T} = (-1,0,0)$, $\hat{B} = (0,0,-1)$ y $\hat{N} = \hat{B}\times\hat{T} = (0,1,0)$.
5. b) $\kappa = \dfrac{6}{2^3} = \dfrac{3}{4}$ y $\tau = \dfrac{(0,0,-6)\cdot(2,0,0)}{36} = 0$.
6. c) Normal $(0,0,-6)$ por P: $-6(z-6) = 0$.

Resultado: $\hat{T} = -\hat{\imath}$, $\hat{N} = \hat{\jmath}$, $\hat{B} = -\hat{k}$; $\kappa = \frac{3}{4}$, $\tau = 0$; plano osculador $z = 6$ (la elipse está en ese plano).

Ejercicio 2A.5.4 · Torsión negativa

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 2.

Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $\vec{r}(t) = 2e^t\,\hat{\imath} + \cos t\,\hat{\jmath} + (t^3+3)\,\hat{k}$, donde t es el tiempo. Calcule, para el punto $P(2,1,3)$:

Unidad 3 · Integrales de línea: trabajo, campo conservativo y función potencial

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno calculará integrales de línea de funciones vectoriales y las aplicará en la resolución de problemas físicos y geométricos.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en los 35 exámenes revisados, de 2016 a 2026. Casi siempre es el problema 4 y vale de 15 a 20 puntos; en varios extraordinarios sale además un problema aparte de «conservativo y solenoidal».
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 3.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 3.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 3.5 con cronómetro (15 min cada uno).

3.1 Conceptos y expresiones

Curva parametrizada. Una curva C se describe con una función vectorial $\vec{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t))$, $a \le t \le b$. El **sentido** de recorrido es el de t creciente: de $A = \vec{r}(a)$ a $B = \vec{r}(b)$. La curva es **cerrada** si $A = B$, y la integral se escribe $\oint_C$.

Integral de línea de un campo escalar. Suma los valores de f a lo largo de la curva, con el elemento de longitud $ds = |\vec{r}\,'(t)|\,dt$:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

No depende del sentido de recorrido. Con $f = 1$ da la longitud de la curva.

Integral de línea de un campo vectorial: el trabajo. Si $\vec{F} = (P, Q, R)$ es una fuerza, el trabajo que realiza sobre una partícula que recorre C es

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Son las representaciones **vectorial**, **paramétrica** y **diferencial** del mismo número. Aquí **no** aparece $|\vec{r}\,'|$. Si $\vec{F}$ es un campo de velocidades y C es cerrada, la misma integral se llama **circulación**.

Propiedades.

- Si se invierte el sentido de recorrido, la integral de un campo vectorial cambia de signo: $\int_{-C}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.
- Si C está formada por tramos $C_1, C_2, \ldots$, la integral es la suma de las integrales sobre cada tramo.

4. $\vec{c}\,'\times\vec{c}\,'' = (1,0,1)\times(0,2,0) = (0\cdot 0 - 1\cdot 2,\ -[1\cdot 0 - 1\cdot 0],\ 1\cdot 2 - 0) = (-2,0,2)$.
5. $\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$ y $\hat{N} = \hat{B}\times\hat{T} = (0,1,0)$.
6. Planos por $(0,0,0)$: osculador ($\perp \hat{B}$) $-x + z = 0$; normal ($\perp \hat{T}$) $x + z = 0$; rectificante ($\perp \hat{N}$) $y = 0$.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{N} = \hat{\jmath}$, $\hat{B} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}}$; osculador $z = x$, normal $x + z = 0$, rectificante $y = 0$. El enunciado original llama «tangente» al plano normal.

Ejercicio 2A.5.7 · Recta parametrizada por longitud de arco

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 2.

Dada la curva $\vec{r}(t) = (1 + 2t,\ 5 - 3t,\ 2 + 4t)$:

- a) parametrice la curva con respecto a la longitud de arco, $\vec{r}(s)$;
- b) calcule el vector tangente unitario utilizando $\vec{r}(s)$;
- c) obtenga el valor de la curvatura.

Resolución.

1. $\vec{r}\,' = (2,-3,4)$ y $|\vec{r}\,'| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$, constante.
2. $s = \displaystyle\int_0^t \sqrt{29}\,du = \sqrt{29}\,t \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{29}}$.
3. a) $\vec{r}(s) = \left(1 + \frac{2s}{\sqrt{29}},\ 5 - \frac{3s}{\sqrt{29}},\ 2 + \frac{4s}{\sqrt{29}}\right)$.
4. b) Con s como parámetro, $\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2,-3,4)$, que ya es unitario.
5. c) $\frac{d\hat{T}}{ds} = \vec{0}$, así que $\kappa = 0$.

Resultado: $\vec{r}(s)$ como arriba, $\hat{T} = \frac{(2,-3,4)}{\sqrt{29}}$ y $\kappa = 0$: la curva es una recta.

Ejercicio 2A.5.8 · Curva dada como intersección

Adaptado de: 3er extraordinario 2024-1, problema 3 (repetido en el 2º final 2024-1, tipo A).

Sea la curva $C:\ x = z,\ x^2 + y^2 = 4$. Determine la curvatura en un punto P de C en el que el vector tangente unitario sea paralelo al vector $\vec{v} = \hat{\imath} + \hat{k}$.

Resolución.

1. Parametriza: $\vec{r}(t) = (2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t,\ 2\cos t)$.
2. $\vec{r}\,' = (-2\operatorname{sen} t,\ 2\cos t,\ -2\operatorname{sen} t)$. Para que sea paralelo a $(1,0,1)$, la componente y debe anularse: $\cos t = 0$, así que $t = \frac{\pi}{2}$ o $t = \frac{3\pi}{2}$, es decir, $P = (0, \pm 2, 0)$.
3. En $t = \frac{\pi}{2}$: $\vec{r}\,' = (-2,0,-2)$ y $\vec{r}\,'' = (-2\cos t,\ -2\operatorname{sen} t,\ -2\cos t) = (0,-2,0)$.
4. $\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'' = \big((0)(0) - (-2)(-2),\ -[(-2)(0) - (-2)(0)],\ (-2)(-2) - 0\big) = (-4,0,4)$, con norma $4\sqrt{2}$.
5. $|\vec{r}\,'| = 2\sqrt{2}$, así que $|\vec{r}\,'|^3 = 16\sqrt{2}$ y $\kappa = \dfrac{4\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}$.
6. En $t = \frac{3\pi}{2}$ se obtiene el mismo valor.

Resultado: en $P(0,2,0)$ y en $P(0,-2,0)$, $\kappa = \frac{1}{4}$. La curva es una elipse en el plano $x = z$.

2. h **y** $\frac{1}{h}$ **mezclados.** En la forma directa $h_u = |\vec{r}_u|$; en la inversa ortogonal $h_u = \frac{1}{|\nabla u|}$. Si en la forma inversa sale $h = \sqrt{10}$, faltó el «uno entre».
3. **Inversa no ortogonal.** Si $\nabla u \cdot \nabla v \neq 0$, la fórmula $h_u = \frac{1}{|\nabla u|}$ no vale (ejercicio 2B.6.1: da $\frac{1}{\sqrt{5}}$, pero el valor correcto es $\frac{\sqrt{5}}{4}$).
4. **Olvidar la raíz.** $|(-1,3)| = \sqrt{10}$, no 10.
5. **Signo del jacobiano.** $J = -\frac{1}{10}$ es válido: el signo depende del orden de las variables. En áreas, volúmenes e integrales se usa $|J|$.
6. $\hat{e}$ **sin normalizar.** $\hat{e}_u = \vec{r}_u / h_u$. Si piden el «vector base» sin sombrero, es $\vec{r}_u$ sin dividir.
7. **Proyectar sin demostrar ortogonalidad.** Antes de escribir $a_u = \vec{a} \cdot \hat{e}_u$ se escribe el producto punto que vale cero.
8. **Signo de la segunda componente del rotacional.** $\nabla \times \vec{F} = (R_y - Q_z)\,\hat{\imath} - (R_x - P_z)\,\hat{\jmath} + (Q_x - P_y)\,\hat{k}$. Por ejemplo, $\vec{v} = (y^2 + 5yz,\ x - 3z^2,\ x + y)$ tiene $\nabla \times \vec{v} = (1 + 6z)\,\hat{\imath} + (5y - 1)\,\hat{\jmath} + (1 - 2y - 5z)\,\hat{k}$.
9. **Factores de escala en el rotacional.** Arriba $h_i \hat{e}_i$, abajo $h_i F_i$ y todo entre $h_u h_v h_w$.
10. **Ángulo de las esféricas.** Confirma que ϕ se mide desde el eje z: entonces $h_\theta = \rho \operatorname{sen}\phi$ y $|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$. Con el orden (ρ, θ, ϕ) el jacobiano sale $-\rho^2 \operatorname{sen}\phi$; con (ρ, ϕ, θ), $+\rho^2 \operatorname{sen}\phi$. Para el rotacional usa (ρ, ϕ, θ): con el otro orden el resultado sale con el signo cambiado.

2B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Directa $x(u, v)$: $h_u = |\vec{r}_u|$, $\hat{e}_u = \vec{r}_u / h_u$, $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \det[\vec{r}_u\ \vec{r}_v]$.
- Inversa ortogonal $u(x, y)$: $h_u = 1/|\nabla u|$, $\hat{e}_u = \nabla u / |\nabla u|$, $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = 1/J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$.
- Ortogonal $\Leftrightarrow$ productos punto nulos · ortogonal $\Rightarrow |J| = h_u h_v h_w$.
- Cilíndricas $h = (1, r, 1)$, $|J| = r$ · esféricas $h = (1, \rho \operatorname{sen}\phi, \rho)$, $|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$.
- $a_u = \vec{a} \cdot \hat{e}_u$ · $F_r = F_x \cos\theta + F_y \operatorname{sen}\theta$, $F_\theta = -F_x \operatorname{sen}\theta + F_y \cos\theta$.
- $\nabla f = \sum \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \hat{e}_i$.
- $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \sum \partial_{q_i}\left(\frac{h_u h_v h_w}{h_i} F_i\right)$ · $\nabla^2 f = \frac{1}{h_u h_v h_w} \sum \partial_{q_i}\left(\frac{h_u h_v h_w}{h_i^2} \partial_{q_i} f\right)$.
- $\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \det \begin{pmatrix} h_u \hat{e}_u & h_v \hat{e}_v & h_w \hat{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{pmatrix}$, con (u, v, w) dextrógiro (esféricas: (ρ, ϕ, θ)).
- Solenoidal: $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ · irrotacional: $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ · armónica: $\nabla^2 f = 0$.
- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

2B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe arriba «forma directa» o «forma inversa», según lo que se haya dado.
2. Deriva y arma los dos o tres vectores (o gradientes).
3. Productos punto: «el sistema **es** (o **no es**) ortogonal», con la frase completa.
4. h con raíz (y «uno entre» en la forma inversa ortogonal), luego $\hat{e}$.
5. Determinante, inversión si hace falta y comprobación $|J| = h_u h_v$.
6. Para un operador: los h, la fórmula general escrita y después la sustitución.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 2A.6.2

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 2.

Sea la curva $C:\ \vec{r}(t) = e^{2t}\,\hat{\imath} + \cos 2t\,\hat{\jmath} + 4\,\hat{k}$. Determine la curvatura en el punto $P(e^{2\pi}, 1, 4)$.

Resultado: $\kappa = e^{-4\pi}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 93.

Ejercicio propuesto 2A.6.3

Adaptado de: 2º final 2025-1, tipo A, problema 2.

Sea la curva $\vec{r}(t) = \left(1 - \sqrt{8}\cos t\right)\hat{\imath} + \left(1 - \sqrt{8}\cos t\right)\hat{\jmath} + 4 \operatorname{sen} t\,\hat{k}$. Determine en el punto $P(1, 1, 4)$: a) el vector tangente unitario; b) la curvatura y el radio de curvatura; c) la ecuación cartesiana del plano osculador.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$; $\kappa = \frac{1}{4}$, $\rho = 4$; plano osculador $x - y = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 2A.6.4

Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 2.

Sea la curva $\vec{r}(t) = \cos t\,\hat{\imath} + \operatorname{sen} t\,\hat{\jmath} + (\cos t + \operatorname{sen} t + 1)\,\hat{k}$. Determine, para el punto $P(1, 0, 2)$: a) los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$; b) una ecuación cartesiana del plano normal.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{N} = \frac{(-2,1,-1)}{\sqrt{6}}$, $\hat{B} = \frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}}$; plano normal $y + z = 2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 2A.6.5

Adaptado de: 1er final 2025-2, tipo A, problema 2.

Sea la curva $\vec{r}(s) = 3 \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{10}}\,\hat{\imath} + \frac{s}{\sqrt{10}}\,\hat{\jmath} + 3\cos\frac{s}{\sqrt{10}}\,\hat{k}$, donde s es la longitud de arco. Determine para el punto $A(0, 0, 3)$: a) los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$; b) la curvatura y la torsión.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(3,1,0)}{\sqrt{10}}$, $\hat{N} = -\hat{k}$, $\hat{B} = \frac{(-1,3,0)}{\sqrt{10}}$; $\kappa = \frac{3}{10}$, $\tau = \frac{1}{10}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

Ejercicio propuesto 2A.6.6

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 2.

Al despegar, un avión se desplaza a lo largo de la trayectoria $\vec{r}(t) = (4 - 3t^2)\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath} + 4t^2\,\hat{k}$. Determine la posición del avión en el instante en que ha recorrido 40 unidades de longitud desde el punto $A(1, 5, 4)$.

Resultado: $(-23,\ 5,\ 36)$, que corresponde a $t = 3$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 94.

3. c) Las curvas frontera son $u = \frac{1}{4}$, $u = 4$, $v = 1$ y $v = -4$. Como $x^2 = \frac{4u+v}{5} \geq 0$ y $y^2 = \frac{u-v}{5} \geq 0$, la imagen además cumple $-4u \leq v \leq u$. R' es la parte del rectángulo $\frac{1}{4} \leq u \leq 4$, $-4 \leq v \leq 1$ que queda dentro de esa cuña.
4. d) $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -8y \end{vmatrix} = -16xy - 4xy = -20xy$.
5. $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = -\frac{1}{20xy}$. En el primer cuadrante, $xy = \frac{1}{5}\sqrt{(4u+v)(u-v)}$.

Resultado: no ortogonal; $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = -\frac{1}{20xy} = -\frac{1}{4\sqrt{(4u+v)(u-v)}}$ en el primer cuadrante.

2B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2B**.

Ejercicio propuesto 2B.6.1

Adaptado de: 2º final 2025-1, tipo A, problema 3.

Sea la transformación $u = x - 2y$, $v = x + 2y$. Determine: a) si el sistema (u, v) es ortogonal; b) el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$; c) las ecuaciones de la transformación inversa; d) los factores de escala h_u, h_v; e) los vectores $\hat{e}_u, \hat{e}_v$.

Resultado: no es ortogonal; $J = \frac{1}{4}$; $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{v-u}{4}$; $h_u = h_v = \frac{\sqrt{5}}{4}$; $\hat{e}_u = \frac{(2,-1)}{\sqrt{5}}$, $\hat{e}_v = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 2B.6.2

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 3.

Sea el sistema $u = x - 4y + z$, $v = x - z$, $w = 2x + y + 2z$. a) Determine si es ortogonal. b) Obtenga $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$. c) Transforme el vector $\vec{u} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ a la base $\{\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w\}$.

Resultado: ortogonal; $\hat{e}_u = \frac{(1,-4,1)}{3\sqrt{2}}$, $\hat{e}_v = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$, $\hat{e}_w = \frac{(2,1,2)}{3}$; $\vec{u} = 3\,\hat{e}_w$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 2B.6.3

Adaptado de: 2º final 2024-2, tipo A, problema 3.

Sea la transformación $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$ y sea la función $f(u, v) = \sqrt{2}\,u^4 v^3$. Calcule el gradiente de f.

Resultado: $h_u = h_v = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\nabla f = 8u^3v^3\,\hat{e}_u + 6u^4v^2\,\hat{e}_v$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

9. **Derivadas hiperbólicas.** $(\cos t)' = -\operatorname{sen} t$, pero $(\cosh t)' = +\operatorname{senh} t$.
10. **Ángulo entre curva y superficie.** Se usa el seno. Si el producto punto es cero, el ángulo es 0 (curva tangente), no 90°.

2A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\hat{T} = \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|} \cdot \hat{B} = \frac{\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|} \cdot \hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$.
- $\kappa = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3} \cdot \rho = \frac{1}{\kappa} \cdot$ centro de curvatura $P + \rho\hat{N} \cdot \tau = \frac{(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') \cdot \vec{r}\,'''}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|^2}$, con signo.
- Frenet-Serret: $\hat{T}\,' = \kappa\hat{N}$, $\hat{N}\,' = -\kappa\hat{T} + \tau\hat{B}$, $\hat{B}\,' = -\tau\hat{N}$ (derivadas respecto a s).
- $a_T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}|} \cdot a_N = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|} = \kappa|\vec{v}|^2 \cdot \vec{a}_N = \vec{a} - a_T\hat{T}$.
- Planos: osculador $\perp \hat{B} \cdot$ normal $\perp \hat{T} \cdot$ rectificante $\perp \hat{N}$.
- $s = \int |\vec{r}\,'|\,dt$; con s como parámetro, $\hat{T} = d\vec{r}/ds$.
- Superficie: $\vec{N} = \vec{R}_p \times \vec{R}_m$ o $\nabla F \cdot$ tangencia $\vec{r}\,' \cdot \vec{N} = 0 \cdot$ ángulo $\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\vec{r}\,' \cdot \vec{N}|}{|\vec{r}\,'||\vec{N}|} \cdot$ intersección: dirección $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$.
- Recta: $\kappa = 0 \cdot$ curva plana: $\tau = 0$.

2A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Encuentra t_0 y escribe la comprobación de las tres coordenadas.
2. Deriva con t y anota $\vec{r}\,'(t_0)$, $\vec{r}\,''(t_0)$ y, si hay torsión, $\vec{r}\,'''(t_0)$.
3. Calcula $|\vec{r}\,'|$ y $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''$; comprueba el producto cruz con dos productos punto iguales a cero.
4. Escribe cada fórmula antes de sustituir: κ (cubo), τ (cuadrado, con signo), a_T, a_N.
5. Da $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ como vectores unitarios, con $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$.
6. Para un plano, vector normal correcto y punto de la curva. Resultado exacto y recuadrado.

Si no se encuentra el camino, escribe t_0 con su comprobación, $\vec{r}\,'(t_0)$ y $\vec{r}\,''(t_0)$, $\hat{T}$ con números, el determinante de $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''$ planteado y la fórmula de κ sustituida. El planteamiento correcto también cuenta.

Ejercicio 2B.5.6 · Gradiente en un sistema UVW

Adaptado de: 3er extraordinario 2024-1, problema 2 (repetido en el 2º final 2024-1, tipo A).

Sea el sistema UVW definido por $x = u - v$, $y = u + v$, $z = w$. Determine:

- a) si el sistema es ortogonal;
- b) los vectores $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$;
- c) el gradiente del campo $\varphi(u, v, w) = \sqrt{2}\,u^2 - \sqrt{2}\,v^2 + 2w^2$ expresado en el sistema UVW.

Resolución.

1. Forma directa: $\vec{r}_u = (1, 1, 0)$, $\vec{r}_v = (-1, 1, 0)$, $\vec{r}_w = (0, 0, 1)$.
2. a) $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = -1 + 1 = 0$, $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_w = 0$ y $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_w = 0$: **ortogonal**.
3. $h_u = \sqrt{2}$, $h_v = \sqrt{2}$, $h_w = 1$.
4. b) $\hat{e}_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $\hat{e}_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$, $\hat{e}_w = \hat{k}$.
5. c) $\varphi_u = 2\sqrt{2}\,u$, $\varphi_v = -2\sqrt{2}\,v$, $\varphi_w = 4w$. Cada una se divide entre su factor de escala.

Resultado: $\nabla\varphi = 2u\,\hat{e}_u - 2v\,\hat{e}_v + 4w\,\hat{e}_w$.

Ejercicio 2B.5.7 · Rotacional en un sistema lineal

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 3.

El sistema UVW está definido por $x = 2u + 2v + w$, $y = -2u + v + 2w$, $z = u - 2v + 2w$. Determine:

- a) si el sistema es ortogonal;
- b) los factores de escala h_u, h_v, h_w;
- c) el rotacional del campo $\vec{F} = w\,\hat{e}_u + u\,\hat{e}_v + v\,\hat{e}_w$ expresado en el sistema UVW.

Resolución.

1. Forma directa y lineal: los vectores base son las columnas de coeficientes, $\vec{r}_u = (2, -2, 1)$, $\vec{r}_v = (2, 1, -2)$, $\vec{r}_w = (1, 2, 2)$.
2. a) $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 4 - 2 - 2 = 0$, $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_w = 2 - 4 + 2 = 0$, $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_w = 2 + 2 - 4 = 0$: **ortogonal**.
3. b) $h_u = h_v = h_w = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$. Comprobación: $J = 27 = 3^3$.
4. c) $\nabla \times \vec{F} = \dfrac{1}{27}\begin{vmatrix} 3\hat{e}_u & 3\hat{e}_v & 3\hat{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ 3w & 3u & 3v \end{vmatrix}$.
5. Componente $\hat{e}_u$: $\frac{3}{27}\,[\partial_v(3v) - \partial_w(3u)] = \frac{3\cdot 3}{27} = \frac{1}{3}$.
6. Componente $\hat{e}_v$: $-\frac{3}{27}\,[\partial_u(3v) - \partial_w(3w)] = -\frac{3}{27}(0 - 3) = \frac{1}{3}$.
7. Componente $\hat{e}_w$: $\frac{3}{27}\,[\partial_u(3u) - \partial_v(3w)] = \frac{1}{3}$.

Resultado: ortogonal; $h_u = h_v = h_w = 3$; $\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{3}\,(\hat{e}_u + \hat{e}_v + \hat{e}_w)$.

Ejercicio 2B.5.8 · Divergencia y rotacional en cilíndricas

Adaptado de: 2º extraordinario 2024-2, problema 3.

Sea $\vec{F}(x, y, z) = xz\,\hat{\imath} + yz\,\hat{\jmath} + xy\,\hat{k}$. Obtenga su divergencia y su rotacional en coordenadas cilíndricas.

Resolución.

Si el sistema no es ortogonal, h_u y $\hat{e}_u$ se obtienen de la forma directa: se despejan x, y y se usa $\vec{r}_u$.

Jacobiano.

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}, \qquad J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = \det\left[\vec{r}_u \;\; \vec{r}_v \;\; \vec{r}_w\right]$$

- **Recíproco:** $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \dfrac{1}{J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)}$. Por eso nunca hace falta despejar: se deriva lo que se tiene y, si se pide el otro, se invierte.
- **Existencia de la inversa:** donde $J \neq 0$ la transformación tiene inversa local. Los puntos donde $J = 0$ son **puntos singulares** (en polares, el origen $r = 0$).
- **Signo:** intercambiar el orden de dos variables cambia el signo de J. En áreas y volúmenes se usa $|J|$: $dA_{xy} = \left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| du\,dv$.
- **Comprobación:** en un sistema ortogonal, $|J| = h_u\,h_v\,h_w$.

Sistemas usuales.

Sistema	Transformación	Factores de escala	$\lvert J\rvert$
Polares (r, θ)	$x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$	$h_r = 1$, $h_\theta = r$	r
Cilíndricas (r, θ, z)	las de polares y $z = z$	$h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_z = 1$	r
Esféricas (ρ, θ, ϕ)	$x = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = \rho\cos\phi$	$h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi$, $h_\phi = \rho$	$\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi$

En esféricas, ϕ es el ángulo medido desde el eje z positivo. En cilíndricas, $\hat{e}_r = (\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta,\ 0)$, $\hat{e}_\theta = (-\mathrm{sen}\,\theta,\ \cos\theta,\ 0)$, $\hat{e}_z = \hat{k}$, de donde

$$F_r = F_x\cos\theta + F_y\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad F_\theta = -F_x\,\mathrm{sen}\,\theta + F_y\cos\theta, \qquad F_z = F_z$$

Componentes de un vector en la base curvilínea. Si el sistema es ortogonal, $\vec{a} = a_u\,\hat{e}_u + a_v\,\hat{e}_v + a_w\,\hat{e}_w$ con $a_u = \vec{a}\cdot\hat{e}_u$, $a_v = \vec{a}\cdot\hat{e}_v$, $a_w = \vec{a}\cdot\hat{e}_w$. En particular, $\hat{\imath} = (\hat{\imath}\cdot\hat{e}_u)\,\hat{e}_u + (\hat{\imath}\cdot\hat{e}_v)\,\hat{e}_v + (\hat{\imath}\cdot\hat{e}_w)\,\hat{e}_w$: los coeficientes son las primeras componentes de cada $\hat{e}$.

Operadores en coordenadas curvilíneas ortogonales. Con $\vec{F} = F_u\,\hat{e}_u + F_v\,\hat{e}_v + F_w\,\hat{e}_w$:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\,\hat{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\,\hat{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\,\hat{e}_w$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial(h_v h_w F_u)}{\partial u} + \frac{\partial(h_u h_w F_v)}{\partial v} + \frac{\partial(h_u h_v F_w)}{\partial w}\right]$$

$$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{e}_u & h_v\hat{e}_v & h_w\hat{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]$$

Resultado: ortogonal; $h_u = h_v = \frac{1}{2}$; $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{4}$.

Ejercicio 2B.5.2 · Área de la región imagen

Adaptado de: 1er final 2025-2, tipo A, problema 3.

Sea la transformación $u = 4x + 8y + 1$, $v = y - 2x$, y sea R_{xy} una región del plano XY de área 5 [u^2]. Determine:

- a) si el sistema (u, v) es ortogonal;
- b) los vectores $\hat{e}_u, \hat{e}_v$ y los factores de escala h_u, h_v;
- c) el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$;
- d) el área de la región R_{uv}, imagen de R_{xy} bajo la transformación.

Resolución.

1. $\nabla u = (4, 8)$ y $\nabla v = (-2, 1)$.
2. a) $\nabla u \cdot \nabla v = -8 + 8 = 0$: **ortogonal**.
3. b) $|\nabla u| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ y $|\nabla v| = \sqrt{5}$. Entonces $\hat{e}_u = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}}$, $\hat{e}_v = \frac{(-2,1)}{\sqrt{5}}$, $h_u = \frac{1}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{20}$ y $h_v = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
4. c) $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 16 = 20$, de donde $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{20}$.
5. d) Cada elemento de área se multiplica por $\left|J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)\right| = 20$: $A_{uv} = 20 \cdot 5 = 100$.

Resultado: ortogonal; $h_u = \frac{\sqrt{5}}{20}$, $h_v = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $J = \frac{1}{20}$; **área de R_{uv} = 100 u²**.

Ejercicio 2B.5.3 · Forma directa y transformación de un vector

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-2, problema 3.

Sean las ecuaciones de transformación $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$.

- a) Demuestre que el sistema es ortogonal.
- b) Calcule los jacobianos $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$ y $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$.
- c) Transforme el vector $\vec{a} = 2\hat{\jmath}$ a coordenadas curvilíneas (u, v), con $u > 0$ y $v > 0$.

Resolución.

1. Forma directa: $\vec{r}_u = (2u,\ 2v)$ y $\vec{r}_v = (-2v,\ 2u)$.
2. a) $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = -4uv + 4uv = 0$: **ortogonal**.
3. $h_u = h_v = \sqrt{4u^2 + 4v^2} = 2\sqrt{u^2 + v^2}$.
4. b) $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 + v^2)$, que coincide con $h_u h_v$; $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \frac{1}{4(u^2 + v^2)}$.
5. c) $\hat{e}_u = \frac{(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ y $\hat{e}_v = \frac{(-v, u)}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.
6. $a_u = (0, 2) \cdot \hat{e}_u = \frac{2v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ y $a_v = (0, 2) \cdot \hat{e}_v = \frac{2u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

Resultado: $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = 4(u^2 + v^2)$, $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \frac{1}{4(u^2+v^2)}$ y $\vec{a} = \frac{2v\,\hat{e}_u + 2u\,\hat{e}_v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«divergencia», «rotacional» en cilíndricas o en el sistema UVW; «¿es solenoidal?»	divergencia y rotacional	2B.3.6
«laplaciano», «función armónica»	laplaciano	2B.3.7

2B.3 Procedimientos

2B.3.1 Forma directa: dan $x(u, v, w)$

1. Deriva cada componente: $\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_w$. Si la transformación es lineal, los vectores son las **columnas** de coeficientes.
2. Ortogonalidad: los tres productos punto. Si hay un parámetro, iguala a cero y despeja.
3. $h_u = |\vec{r}_u|$, **con raíz**.
4. $\hat{e}_u = \dfrac{\vec{r}_u}{h_u}$.
5. $J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) = \det[\vec{r}_u\ \vec{r}_v\ \vec{r}_w]$. Si piden el otro, inviértelo.
6. Comprueba: $|J| = h_u h_v h_w$ si es ortogonal.

2B.3.2 Forma inversa: dan $u(x, y)$

1. Gradientes: $\nabla u = (u_x, u_y)$ y $\nabla v = (v_x, v_y)$.
2. Ortogonalidad: $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.
3. Si es ortogonal: $h_u = \dfrac{1}{|\nabla u|}$ (**uno entre**, con raíz) y $\hat{e}_u = \dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}$.
4. $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$, y el que casi siempre se pide es $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \dfrac{1}{J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)}$.
5. Si piden el resultado en u, v, busca una identidad: por ejemplo, $u^2 + v^2 = (x^2 + y^2)^2$.
6. Área de la imagen: $A_{uv} = \left|J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)\right| A_{xy}$ cuando el jacobiano es constante.

2B.3.3 Sistema no ortogonal

1. Escribe el producto punto distinto de cero y concluye «el sistema **no** es ortogonal».
2. El jacobiano se calcula igual.
3. Si piden h o $\hat{e}$: despeja la transformación inversa, arma $\vec{r}(u, v)$ y usa $h_u = |\vec{r}_u|$ y $\hat{e}_u = \vec{r}_u / h_u$. La fórmula $h_u = 1/|\nabla u|$ **no** vale aquí.
4. No se proyectan vectores con productos punto: la base no es ortogonal.

2B.3.4 Expresar un vector en la base curvilínea

1. Demuestra primero que el sistema es ortogonal.
2. Calcula $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$.
3. $a_u = \vec{a} \cdot \hat{e}_u$, $a_v = \vec{a} \cdot \hat{e}_v$, $a_w = \vec{a} \cdot \hat{e}_w$, y escribe $\vec{a} = a_u\hat{e}_u + a_v\hat{e}_v + a_w\hat{e}_w$.
4. Para $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$: sus coeficientes son las componentes x, y y z de cada $\hat{e}$.

2B.3.5 Gradiente

1. Calcula h_u, h_v, h_w.
2. Deriva f respecto a cada coordenada curvilínea.

- a) la curvatura y la torsión de la curva;
- b) los vectores aceleración tangencial y aceleración normal.

Resolución.

1. $2e^t = 2 \Rightarrow t_0 = 0$. Comprobación: $\cos 0 = 1$ y $0 + 3 = 3$.
2. $\vec{r}\,' = (2e^t,\ -\operatorname{sen} t,\ 3t^2) \Rightarrow (2, 0, 0)$; $\vec{r}\,'' = (2e^t,\ -\cos t,\ 6t) \Rightarrow (2, -1, 0)$; $\vec{r}\,''' = (2e^t,\ \operatorname{sen} t,\ 6) \Rightarrow (2, 0, 6)$.
3. $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = (2,0,0) \times (2,-1,0) = \big(0,\ 0,\ (2)(-1) - (0)(2)\big) = (0, 0, -2)$, con norma 2; $|\vec{r}\,'| = 2$.
4. a) $\kappa = \dfrac{2}{2^3} = \dfrac{1}{4}$ y $\tau = \dfrac{(0,0,-2)\cdot(2,0,6)}{2^2} = \dfrac{-12}{4} = -3$.
5. b) $a_T = \dfrac{(2,0,0)\cdot(2,-1,0)}{2} = 2$, así que $\vec{a}_T = 2\,\hat{T} = (2, 0, 0)$.
6. $\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T = (2,-1,0) - (2,0,0) = (0,-1,0)$. Comprobación: $|\vec{a}_N| = \frac{2}{2} = 1$.

Resultado: $\kappa = \frac{1}{4}$, $\tau = -3$; $\vec{a}_T = 2\,\hat{\imath}$ y $\vec{a}_N = -\hat{\jmath}$. La torsión es negativa y así se escribe.

Ejercicio 2A.5.5 · Curvatura y plano osculador

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 2.

Sea la curva $\vec{r}(t) = t\,\hat{\imath} + \ln(t^2)\,\hat{\jmath} + \dfrac{1}{2t}\,\hat{k}$. Determine en el punto $P\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$:

- a) la curvatura;
- b) la ecuación cartesiana del plano osculador.

Resolución.

1. $x = t = 1 \Rightarrow t_0 = 1$. Comprobación: $\ln 1 = 0$ y $\frac{1}{2}$.
2. $\vec{r}\,' = \left(1,\ \dfrac{2}{t},\ -\dfrac{1}{2t^2}\right) \Rightarrow \left(1, 2, -\frac{1}{2}\right)$; $\vec{r}\,'' = \left(0,\ -\dfrac{2}{t^2},\ \dfrac{1}{t^3}\right) \Rightarrow (0, -2, 1)$.
3. $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \left(2\cdot 1 - (-\frac{1}{2})(-2),\ -[1\cdot 1 - 0],\ 1\cdot(-2) - 0\right) = (1, -1, -2)$, con norma $\sqrt{6}$.
4. $|\vec{r}\,'| = \sqrt{1 + 4 + \frac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$, así que $|\vec{r}\,'|^3 = \dfrac{21\sqrt{21}}{8}$.
5. a) $\kappa = \dfrac{8\sqrt{6}}{21\sqrt{21}} = \dfrac{8}{21}\sqrt{\dfrac{2}{7}} = \dfrac{8\sqrt{14}}{147} \approx 0.204$.
6. b) Normal $(1, -1, -2)$ por P: $(x-1) - (y-0) - 2\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$.

Resultado: $\kappa = \dfrac{8\sqrt{14}}{147}$; plano osculador $x - y - 2z = 0$.

Ejercicio 2A.5.6 · Triedro y planos en el origen

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 2.

Sea la curva $\vec{c}(\theta) = \theta\cos\theta\,\hat{\imath} + \theta\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{k}$. Determine, en el origen de coordenadas, los vectores del triedro móvil $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ y las ecuaciones cartesianas de los planos osculador, normal y rectificante.

Resolución.

1. En el origen, $\theta_0 = 0$.
2. $\vec{c}\,' = (\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta,\ \cos\theta) \Rightarrow (1, 0, 1)$.
3. $\vec{c}\,'' = (-2\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta,\ 2\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta,\ -\operatorname{sen}\theta) \Rightarrow (0, 2, 0)$.

- El valor no depende de la parametrización elegida, siempre que se respete el sentido.

Rotacional y divergencia. Para $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \big(R_y - Q_z,\ -(R_x - P_z),\ Q_x - P_y\big), \qquad \nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$$

- $\vec{F}$ es **irrotacional** si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.
- $\vec{F}$ es **solenoidal** si $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.
- En el plano, con $\vec{F} = (P, Q)$, solo queda la componente $\hat{k}$: $Q_x - P_y$.

Campo conservativo y función potencial. $\vec{F}$ es **conservativo** si existe una función escalar φ, llamada **función potencial**, tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$, es decir, $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$, $\varphi_z = R$. En una región simplemente conexa (sin «agujeros», como todo $\mathbb{R}^3$) son equivalentes:

Afirmación	Significado
$\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$	el campo es irrotacional
$\vec{F} = \nabla\varphi$	existe función potencial
$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = d\varphi$	la expresión diferencial es una **diferencial exacta**
$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ solo depende de A y B	la integral es **independiente de la trayectoria**
$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva cerrada	el trabajo en un circuito es nulo

Teorema fundamental de las integrales de línea. Si $\vec{F} = \nabla\varphi$, entonces

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

para **cualquier** curva de A a B: no hace falta parametrizar. El físico llama energía potencial a $-\varphi$; la cuenta es la misma.

Integrales de línea en coordenadas curvilíneas ortogonales. Con factores de escala h_1, h_2, h_3:

$$d\vec{r} = h_1\,dq_1\,\hat{e}_1 + h_2\,dq_2\,\hat{e}_2 + h_3\,dq_3\,\hat{e}_3, \qquad \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_1 h_1\,dq_1 + F_2 h_2\,dq_2 + F_3 h_3\,dq_3$$

Sistema	Coordenadas	Factores de escala	$\vec{F}\cdot d\vec{r}$
Polares	(r, θ)	$(1,\ r)$	$F_r\,dr + F_\theta\,r\,d\theta$
Cilíndricas	(r, θ, z)	$(1,\ r,\ 1)$	$F_r\,dr + F_\theta\,r\,d\theta + F_z\,dz$
Esféricas	(ρ, θ, ϕ), ϕ medido desde el eje z	$(1,\ \rho\operatorname{sen}\phi,\ \rho)$	$F_\rho\,d\rho + F_\theta\,\rho\operatorname{sen}\phi\,d\theta + F_\phi\,\rho\,d\phi$

Ejercicio 2A.5.9 · Curva tangente a una superficie

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 2 (repetido en el 1er extraordinario 2025-1).

Demuestre que la curva $C:\ \vec{r}(t)=\left(\dfrac{t^3}{4}-2,\ \dfrac{4}{t}-3,\ \cos(t-2)\right)$ es tangente a la superficie $S:\ x^3+y^3+z^3-xyz=0$ en el punto $Q(0,-1,1)$.

Resolución.

1. $\cos(t-2)=1$ y $\frac{t^3}{4}-2=0$ dan $t_0=2$. Comprobación: $\frac{4}{2}-3=-1$. El punto está en la curva.
2. $F(Q)=0+(-1)+1-0=0$: el punto está en la superficie.
3. $\vec{r}\,'=\left(\dfrac{3t^2}{4},\ -\dfrac{4}{t^2},\ -\operatorname{sen}(t-2)\right)\Rightarrow \vec{r}\,'(2)=(3,-1,0)$.
4. $\nabla F=(3x^2-yz,\ 3y^2-xz,\ 3z^2-xy)\Rightarrow \nabla F(Q)=(1,3,3)$.
5. $\vec{r}\,'(2)\cdot\nabla F(Q)=3-3+0=0$.

Resultado: la tangente a la curva es perpendicular a la normal de la superficie en un punto común: **la curva es tangente a S en Q.**

Ejercicio 2A.5.10 · Ángulo entre una curva y una superficie

Adaptado de: 2º extraordinario 2025-1, problema 2.

Sean la superficie $S:\ \vec{R}(p,m)=(m+p)\hat{\imath}+(m-p)\hat{\jmath}+4mp\hat{k}$ y la recta $C:\ x=t-2,\ y=-t-2,\ z=-8t$. Calcule el ángulo de intersección entre S y C en el punto P que corresponde a $p=1$.

Resolución.

1. Con $p=1$: $m+1=t-2$ y $m-1=-t-2$. Sumando, $2m=-4$, así que $m=-2$ y $t=1$. Comprobación en z: $4(-2)(1)=-8=-8(1)$. El punto es $P(-1,-3,-8)$.
2. $\vec{R}_p=(1,-1,4m)=(1,-1,-8)$ y $\vec{R}_m=(1,1,4p)=(1,1,4)$.
3. $\vec{N}=\vec{R}_p\times\vec{R}_m=\big((-1)(4)-(-8)(1),\ -[(1)(4)-(-8)(1)],\ (1)(1)-(-1)(1)\big)=(4,-12,2)$.
4. $\vec{r}\,'=(1,-1,-8)$ y $\vec{r}\,'\cdot\vec{N}=4+12-16=0$.
5. $\operatorname{sen}\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$.

Resultado: $\alpha=0$. La recta es tangente a S; de hecho está contenida en ella, porque S es $z=x^2-y^2$ y $(t-2)^2-(t+2)^2=-8t$.

2A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2A**.

Ejercicio propuesto 2A.6.1

Adaptado de: 2º final 2024-2, tipo A, problema 2.

Una partícula se desplaza a lo largo de la trayectoria $C:\ x=t^2,\ y=-t,\ z=-t^2$, donde t es el tiempo. Calcule los vectores aceleración tangencial y aceleración normal en el punto $P(1,-1,-1)$.

Resultado: $\vec{a}_T=\frac{1}{9}(16,-8,-16)$ y $\vec{a}_N=\frac{1}{9}(2,8,-2)$.

7. Resultado exacto y recuadrado.

Si no se encuentra el camino, escribe qué forma se dio, los vectores derivados, el producto punto planteado, h con números y la matriz del jacobiano, aunque el determinante quede sin terminar. El planteamiento correcto también cuenta.

Ejercicio propuesto 2A.6.7

Adaptado de: 2º final 2018-1, tipo A, problema 2.

Sea la curva $C:\ y = x,\ z = x^2 + y^2$. Determine en el origen: a) los vectores del triedro móvil; b) la curvatura; c) las coordenadas del centro de la circunferencia de curvatura; d) una ecuación general del plano osculador.

Resultado: $\hat{T} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$, $\hat{N} = \hat{k}$, $\hat{B} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$; $\kappa = 2$; centro $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$; plano osculador $x - y = 0$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 2A.6.8

Adaptado de: Guía de extraordinario de 1986, grupo 6, ejercicio 1.

Sea la superficie $\vec{r}(s,t) = (2s + 3t)\,\hat{\imath} + (-s + 2t)\,\hat{\jmath} + (2t^2 - 3s)\,\hat{k}$. Obtenga la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie en el punto donde $x = 1$, $y = -4$.

Resultado: $s = 2$, $t = -1$, punto $(1, -4, -4)$; plano tangente $10x - y + 7z + 14 = 0$; recta normal $\frac{x-1}{10} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+4}{7}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

Ejercicio propuesto 2A.6.9

Adaptado de: Guía de extraordinario de 1986, grupo 7, ejercicio 2.

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ y $x^2 + y^2 = 13$ en el punto $P(3, 2, -6)$.

Resultado: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3}$, $z = -6$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 95.

2A.7 Errores frecuentes

1. **Torsión sin signo.** El numerador $(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') \cdot \vec{r}\,'''$ puede ser negativo, y entonces $\tau < 0$ (ejercicio 2A.5.4). No se le pone valor absoluto. Otro caso: $\vec{r} = (4\cos t,\ 3t,\ 4\operatorname{sen} t)$ en $t = 0$ da $\kappa = \frac{4}{25}$ y $\tau = -\frac{3}{25}$.
2. **Norma negativa.** $|\vec{v}|$, $|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|$ y κ nunca son negativos; si sale un signo menos, hay un error.
3. **Perder la notación vectorial.** «$T = -\operatorname{sen} t + \cos t$» es un número, no un vector. Se escribe siempre $\langle _, _, _ \rangle$ o con $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$.
4. **Confundir $\vec{v}$ con $\hat{T}$.** $\hat{T} = \vec{v}/|\vec{v}|$; solo coinciden cuando la rapidez vale 1.
5. **Orden del producto cruz.** $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Se usa $\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$: con $\hat{T} \times \hat{B}$ sale $-\hat{N}$.
6. **Evaluar demasiado pronto.** Si se sustituye t_0 en $\vec{r}$ y luego se deriva, se deriva una constante y todo da cero. Primero se deriva con t.
7. **Evaluar demasiado tarde.** Simplificar $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''$ con senos y cosenos antes de sustituir es lento y propenso a errores. Se deriva, se evalúa y se hace el producto cruz con números.
8. **Potencias de las fórmulas.** κ lleva $|\vec{r}\,'|^3$ (al cubo) y τ lleva $|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|^2$ (al cuadrado). En la hélice del ejemplo 2A.4, $\kappa = \frac{15}{125}$, no $\frac{15}{5}$ (eso es a_N).

Ejercicio propuesto 2B.6.4

Adaptado de: 1er extraordinario 2018-1, tipo A, problema 3.

Calcule la divergencia del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2)(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}) + z\,\hat{k}$ en coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z).

Resultado: $F_\rho = \rho^3$, $F_\theta = 0$, $F_z = z$; $\nabla \cdot \vec{F} = 4\rho^2 + 1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 2B.6.5

Adaptado de: 1er extraordinario 2025-2, problema 3.

Sea la transformación $x = u\cos\theta$, $y = v\operatorname{sen}\theta$, $z = u^2 + v^2$. Determine: a) el vector base $\vec{e}_\theta$; b) el factor de escala h_v; c) el jacobiano $J\left(\frac{x,y,z}{u,v,\theta}\right)$.

Resultado: $\vec{e}_\theta = (-u\operatorname{sen}\theta,\ v\cos\theta,\ 0)$; $h_v = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + 4v^2}$; $J = 2u^2\operatorname{sen}^2\theta - 2v^2\cos^2\theta$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 2B.6.6

Adaptado de: 2º final 2025-2, tipo A, problema 3.

Determine si el campo, expresado en coordenadas cilíndricas, $\vec{F}(r, \theta, z) = \left(r^2 z + \frac{r}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\hat{e}_r + (r\cos\theta)\,\hat{e}_\theta - \frac{3}{2}rz^2\,\hat{e}_z$ es solenoidal.

Resultado: $\nabla \cdot \vec{F} = 0$: sí es solenoidal.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 96.

Ejercicio propuesto 2B.6.7

Adaptado de: 2º final 2018-1, tipo A, problema 3.

Obtenga el laplaciano de la función $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}$ en el punto $B(1, 1, 0)$.

Resultado: $\nabla^2 f = 30\,(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$; en B, $60\sqrt{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

Ejercicio propuesto 2B.6.8

Adaptado de: Guía de extraordinario de 1986, ejemplo del tema III, inciso c.1.

Sean las ecuaciones de transformación $x = 2u + 6v$, $y = -4u + 3v$. Obtenga la expresión del gradiente de $f(u, v) = 2u + v^2$ referida al sistema x, y y evalúela en el punto $u = 1$, $v = 2$.

Resultado: $\nabla f = \frac{11}{15}\,\hat{\imath} - \frac{2}{15}\,\hat{\jmath}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

2B.7 Errores frecuentes

1. **Dirección del jacobiano.** Con $x(u, v)$ sale directo $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$; con $u(x, y)$ sale $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$ y se invierte. No se despeja.

Unidad 2 · Parte B · Funciones vectoriales: coordenadas curvilíneas, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno utilizará e interpretará las variaciones de una función vectorial de variable vectorial y las aplicará para resolver problemas físicos y geométricos en el sistema de referencia más conveniente.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 33 de los 35 exámenes revisados, de 2016 a 2026. Casi siempre es el problema 2 o el 3 y vale de 15 a 20 puntos.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2B.1 (20 min).
  2. Sigue el ejemplo 2B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 2B.5 con cronómetro (15 min cada uno).

2B.1 Conceptos y expresiones

Coordenadas curvilíneas. Un sistema de coordenadas (u, v, w) se define con **ecuaciones de transformación**. Pueden venir de dos formas:

- **Forma directa:** $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$. El vector de posición es $\vec{r}(u, v, w) = (x, y, z)$.
- **Forma inversa:** $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$.

Al fijar dos coordenadas y variar la tercera se obtiene una **curva coordenada**; al fijar una sola, una **superficie coordenada**.

Vectores base, factores de escala y vectores unitarios.

- **Vector base:** $\vec{r}_u = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, tangente a la curva coordenada u (igual para v y w).
- **Factor de escala:** $h_u = |\vec{r}_u|$. Mide cuánto se avanza en el espacio por cada unidad de u.
- **Vector unitario:** $\hat{e}_u = \dfrac{\vec{r}_u}{h_u}$.
- **Diferencial del vector de posición:** $d\vec{r} = \vec{r}_u\,du + \vec{r}_v\,dv + \vec{r}_w\,dw = h_u\,du\,\hat{e}_u + h_v\,dv\,\hat{e}_v + h_w\,dw\,\hat{e}_w$.

Sistema ortogonal. El sistema es **ortogonal** si sus vectores base son perpendiculares entre sí:

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0, \qquad \vec{r}_u \cdot \vec{r}_w = 0, \qquad \vec{r}_v \cdot \vec{r}_w = 0$$

En la forma inversa, la condición equivalente es $\nabla u \cdot \nabla v = \nabla u \cdot \nabla w = \nabla v \cdot \nabla w = 0$. En un sistema ortogonal, y **solo** en él:

$$h_u = \frac{1}{|\nabla u|}, \qquad \hat{e}_u = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$$

1. Componentes cilíndricas: $F_r = xz\cos\theta + yz\,\mathrm{sen}\,\theta = rz$; $F_\theta = -xz\,\mathrm{sen}\,\theta + yz\cos\theta = 0$; $F_z = xy = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{sen}\,2\theta$.
2. Divergencia: $\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2 z)}{\partial r} + 0 + 0 = \frac{2rz}{r} = 2z$.
3. Rotacional, componente $\hat{e}_r$: $\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} = \frac{1}{r}r^2\cos 2\theta = r\cos 2\theta$.
4. Componente $\hat{e}_\theta$: $\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} = r - r\,\mathrm{sen}\,2\theta$.
5. Componente $\hat{e}_z$: $\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right] = 0$.
6. Comprobación en cartesianas: $\nabla\cdot\vec{F} = z + z + 0 = 2z$ y $\nabla\times\vec{F} = (x-y,\ x-y,\ 0)$, cuyas componentes cilíndricas son $(x-y)(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta) = r\cos 2\theta$ y $(x-y)(\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta) = r(1 - \mathrm{sen}\,2\theta)$.

Resultado: $\nabla\cdot\vec{F} = 2z$ y $\nabla\times\vec{F} = r\cos 2\theta\,\hat{e}_r + r(1-\mathrm{sen}\,2\theta)\,\hat{e}_\theta$.

Ejercicio 2B.5.9 · Laplaciano en un sistema curvilíneo

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 3.

Sea el sistema coordenado curvilíneo ortogonal definido por $x = u^2+v^2$, $y = u^2-v^2$, $z = w$. Utilice este sistema para calcular el laplaciano de la función escalar $f(u, v) = u^4 + v^4$.

Resolución.

1. $\vec{r}_u = (2u, 2u, 0)$, $\vec{r}_v = (2v, -2v, 0)$, $\vec{r}_w = (0, 0, 1)$; los productos punto son cero.
2. Con $u, v > 0$: $h_u = 2\sqrt{2}\,u$, $h_v = 2\sqrt{2}\,v$, $h_w = 1$, y $h_u h_v h_w = 8uv$.
3. $\dfrac{h_v h_w}{h_u}\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{v}{u}\cdot 4u^3 = 4u^2 v$ y $\dfrac{h_u h_w}{h_v}\dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{u}{v}\cdot 4v^3 = 4uv^2$.
4. $\nabla^2 f = \dfrac{1}{8uv}\left[\dfrac{\partial(4u^2 v)}{\partial u} + \dfrac{\partial(4uv^2)}{\partial v}\right] = \dfrac{8uv + 8uv}{8uv} = 2$.
5. Comprobación: $x + y = 2u^2$ y $x - y = 2v^2$, así que $f = \frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{4} = \frac{x^2+y^2}{2}$, cuyo laplaciano es $1 + 1 = 2$.

Resultado: $\nabla^2 f = 2$.

Ejercicio 2B.5.10 · Sistema no ortogonal y región imagen

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-1, problema 3.

Sean la transformación $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - 4y^2$ y la región R del plano xy limitada por $x^2 - 4y^2 = 1$, $4y^2 - x^2 = 4$, $4x^2 + 4y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

- a) Determine si el sistema uv es ortogonal.
- b) Dibuje la región R en el plano xy.
- c) Dibuje la región R' del plano uv, imagen de R.
- d) Calcule el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

Resolución.

1. a) $\nabla u = (2x, 2y)$ y $\nabla v = (2x, -8y)$; $\nabla u \cdot \nabla v = 4x^2 - 16y^2$, que no es cero en general: el sistema **no es ortogonal**.
2. b) R está entre las circunferencias de radios $\frac{1}{2}$ y 2 y entre las hipérbolas $x^2 - 4y^2 = 1$ (abre hacia el eje x) y $x^2 - 4y^2 = -4$ (abre hacia el eje y). Por simetría basta el primer cuadrante.

Orden de las coordenadas en el rotacional. La fórmula del determinante supone que el orden (u, v, w) es dextrógiro, es decir, que el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ es positivo. Si es negativo, el rotacional sale con el signo cambiado: divide entre el jacobiano con su signo o reordena las coordenadas. En esféricas usa el orden (ρ, ϕ, θ); con (ρ, θ, ϕ) el jacobiano vale $-\rho^2 \operatorname{sen}\phi$.

En **cilíndricas**:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \qquad \nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{e}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{e}_z$$

En **esféricas**, para una función que solo depende de ρ: $\nabla^2 f = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \dfrac{df}{d\rho}\right)$.

En **cartesianas**, con $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$\nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z, \qquad \nabla\times\vec{F} = (R_y - Q_z)\,\hat{\imath} - (R_x - P_z)\,\hat{\jmath} + (Q_x - P_y)\,\hat{k}, \qquad \nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

Interpretación física.

- La **divergencia** es el flujo neto que sale por unidad de volumen: positiva en una fuente, negativa en un sumidero. Si $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, el campo es **solenoidal**.
- El **rotacional** mide la tendencia del campo a hacer girar; su componente en una dirección es la circulación por unidad de área. Si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, el campo es **irrotacional**.
- El **laplaciano** es $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$. Una función con $\nabla^2 f = 0$ es **armónica**.

Propiedades del operador nabla. $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ · $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ · $\nabla \cdot (f\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f\,\nabla \cdot \vec{F}$ · $\nabla \times (f\vec{F}) = \nabla f \times \vec{F} + f\,\nabla \times \vec{F}$.

2B.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Procedimiento
«$x = \ldots,\ y = \ldots$ en función de u, v»: ortogonal, h, $\hat{e}$, jacobiano	forma directa	2B.3.1
«$u = \ldots,\ v = \ldots$ en función de x, y»: ortogonal, h, $\hat{e}$, jacobiano	forma inversa	2B.3.2
«determine si es ortogonal» y el producto punto no es cero	sistema no ortogonal	2B.3.3
«valor de a para que la transformación sea ortogonal»	ortogonalidad con un parámetro	2B.3.1
«área de la imagen de la región», «dibuje la región R'»	jacobiano y región	2B.3.2
«transformar el vector», «expresar $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ en términos de $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$»	componentes en la base nueva	2B.3.4
«gradiente de $f(u, v)$ expresado en el sistema»	gradiente	2B.3.5

Ejercicio 2B.5.4 · Forma inversa no lineal

Adaptado de: 1er extraordinario 2026-1, problema 2.

Sea el sistema curvilíneo $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Determine:

- a) si el sistema es ortogonal;
- b) los factores de escala h_u, h_v;
- c) los vectores $\hat{e}_u, \hat{e}_v$;
- d) el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

Resolución.

1. Forma inversa: $\nabla u = (2x, -2y)$ y $\nabla v = (2y, 2x)$.
2. a) $\nabla u \cdot \nabla v = 4xy - 4xy = 0$: **ortogonal**.
3. $|\nabla u| = |\nabla v| = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.
4. b) $h_u = h_v = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$.
5. c) $\hat{e}_u = \dfrac{(x, -y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ y $\hat{e}_v = \dfrac{(y, x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
6. d) $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2)$, de donde $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \dfrac{1}{4(x^2 + y^2)}$.
7. En u, v: $u^2 + v^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$, así que $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \dfrac{1}{4\sqrt{u^2 + v^2}}$.

   Comprobación: $h_u h_v = \frac{1}{4(x^2+y^2)}$.

Resultado: ortogonal; $h_u = h_v = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$; $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \dfrac{1}{4(x^2 + y^2)} = \dfrac{1}{4\sqrt{u^2 + v^2}}$. Es la inversa de la transformación del ejercicio 2B.5.3.

Ejercicio 2B.5.5 · Parámetro que hace ortogonal al sistema

Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, tipo A, problema 2.

Sea la transformación $x = 2u^2 + v^2$, $y = u^2 + av^2$, $z = 3w$.

- a) Determine el valor de a para que la transformación sea ortogonal.
- b) Exprese los vectores $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ en términos de los vectores base $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$.

Resolución.

1. Forma directa: $\vec{r}_u = (4u,\ 2u,\ 0)$, $\vec{r}_v = (2v,\ 2av,\ 0)$, $\vec{r}_w = (0, 0, 3)$.
2. $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_w = 0$ y $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_w = 0$ para todo a.
3. a) $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 8uv + 4a\,uv = 4uv(2 + a) = 0 \Rightarrow a = -2$.
4. Con $a = -2$ y $u, v > 0$: $h_u = \sqrt{16u^2 + 4u^2} = 2\sqrt{5}\,u$, $h_v = \sqrt{4v^2 + 16v^2} = 2\sqrt{5}\,v$, $h_w = 3$.
5. $\hat{e}_u = \frac{(2,1,0)}{\sqrt{5}}$, $\hat{e}_v = \frac{(1,-2,0)}{\sqrt{5}}$, $\hat{e}_w = \hat{k}$.
6. b) Los coeficientes de $\hat{\imath}$ son las primeras componentes de cada $\hat{e}$, y así sucesivamente.

Resultado: $a = -2$; $\hat{\imath} = \dfrac{2\,\hat{e}_u + \hat{e}_v}{\sqrt{5}}$, $\hat{\jmath} = \dfrac{\hat{e}_u - 2\,\hat{e}_v}{\sqrt{5}}$, $\hat{k} = \hat{e}_w$ (para $u, v > 0$). Comprobación: $|J| = 60uv = h_u h_v h_w$.

3. Divide cada derivada entre **su** factor de escala y multiplica por su $\hat{e}$.

2B.3.6 Divergencia y rotacional

1. Si el campo viene en cartesianas y lo piden en cilíndricas, obtén F_r, F_θ y F_z con las fórmulas de 2B.1 y sustituye $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$.
2. Escribe la fórmula general con los h del sistema.
3. En el rotacional: comprueba que el orden (u, v, w) da jacobiano positivo (en esféricas, (ρ, ϕ, θ)); arriba $h_i\hat{e}_i$, abajo h_iF_i, todo dividido entre $h_uh_vh_w$. Desarrolla término a término, con el signo menos de la segunda componente.
4. Solenoidal: divergencia igual a cero. Irrotacional: rotacional igual al vector cero.

2B.3.7 Laplaciano

1. Identifica el sistema más cómodo: si f depende de $x^2+y^2+z^2$, usa esféricas; si depende de x^2+y^2, cilíndricas; si viene dada en (u, v, w), el sistema dado.
2. Calcula los h y escribe la fórmula general.
3. Deriva desde adentro hacia afuera y simplifica.
4. Si piden el valor en un punto, sustituye al final.

2B.4 Ejemplo resuelto

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 3.

Sea el sistema de coordenadas curvilíneas definido por $u = -x + 3y$, $v = 3x + y$. Determine:

- a) si el sistema (u, v) es ortogonal;
- b) los vectores unitarios $\hat{e}_u$, $\hat{e}_v$;
- c) los factores de escala h_u, h_v;
- d) el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

Datos: forma **inversa** (u y v en función de x y y).

Planteamiento. Se trabaja con los gradientes y, al final, se invierte el jacobiano. No se despeja nada.

Resolución.

1. $\nabla u = (-1,\ 3)$ y $\nabla v = (3,\ 1)$.
2. a) $\nabla u \cdot \nabla v = (-1)(3) + (3)(1) = 0$: el sistema **sí es ortogonal**.
3. $|\nabla u| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ y $|\nabla v| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.
4. b) $\hat{e}_u = \dfrac{-\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}}{\sqrt{10}}$ y $\hat{e}_v = \dfrac{3\hat{\imath} + \hat{\jmath}}{\sqrt{10}}$.
5. c) $h_u = h_v = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
6. $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - (3)(3) = -10$.
7. d) $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \dfrac{1}{-10} = -\dfrac{1}{10}$.
8. Comprobación: $h_uh_v = \frac{1}{10} = |J|$.

Resultado: ortogonal; $\hat{e}_u = \frac{(-1,3)}{\sqrt{10}}$, $\hat{e}_v = \frac{(3,1)}{\sqrt{10}}$; $h_u = h_v = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = -\frac{1}{10}$.

> Las transformaciones lineales de los exámenes recientes se resuelven con pura aritmética: las derivadas son los coeficientes. Lo único que hay que decidir es si se dieron $x(u, v)$ o $u(x, y)$.

2B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2B.5.1 · Transformación lineal inversa

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 3.

Sea el sistema $u = x - \sqrt{3}\,y$, $v = \sqrt{3}\,x + y$. Determine si es ortogonal, los vectores $\hat{e}_u, \hat{e}_v$, los factores de escala h_u, h_v y el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

Resolución.

1. Forma inversa: $\nabla u = (1, -\sqrt{3})$, $\nabla v = (\sqrt{3}, 1)$.
2. $\nabla u \cdot \nabla v = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$: **ortogonal**.
3. $|\nabla u| = |\nabla v| = \sqrt{1+3} = 2$, así que $h_u = h_v = \frac{1}{2}$.
4. $\hat{e}_u = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\hat{e}_v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
5. $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4$, de donde $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{4}$. Comprobación: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.